第２学年１組　数学科

生徒が自ら数学的知識を獲得していく授業

ー 一次関数の学習を通して ー

竹内　恭平

昨年度より、「論理的・批判的思考により数学的知識を追発明したり、新たな価値を創造したりすることができる生徒」の育成を目指して授業実践を行っている。今年度は、『協働による学習』や『ストーリー性のある長いスパンの単元構成』に加え、『数学的な見方・考え方の可視化』によって、コンテンツ・ベースの授業からコンピテンシー・ベースの授業への転換を図っている。

今回、第２学年の単元『一次関数』で実践を行った。導入では、一次関数に限らず、一部学習すべき範囲を超えた関数と比較していくことで、一次関数に関する概念形成を図る。次に、「移動時間と距離」という現実の世界の文脈、そして、「動点問題」という数学の世界の文脈で、獲得した概念の補強を図り、最後に一次関数を用いて「安居中学校の印刷にかかる費用」について考察し、節約に資する使用法を啓発していくというプロジェクトを設定した。

昨年度より、関数領域では、①いくつかの関数を比較して概念を形成し、②同一文脈による数時間のスパンの学習にいくつか取り組むことによって概念を補強していく、という流れで授業実践を行っている。手応えとともに、事前の緻密な教材研究が肝要であると再認識した。

１．はじめに

今年度、数学科では「論理的・批判的思考により数学的知識を追発明したり、新たな価値を創造したりすることができる生徒」の育成に向けて、新たに『数学的な見方・考え方の可視化』を行っている。いわゆる演繹・帰納・類推といった考え方であり、これまで授業中に生徒の思考を評価・価値づけすることはあっても、それだけでコンピテンシー・ベースの授業になっているとは思えなかった。そこで、価値づけした数学的な見方・考え方を掲示にして意識できるようにした。より生徒にとって身近に感じられるように、「帰納」ではなく「具体的に実験してみる」や、「演繹」ではなく「根拠を明確にする」というようにした。この取組の成果はまだ実感できていないが、実践を積み重ねていきたい。

今回、第２学年の単元『一次関数』の授業実践の一部を次章から記述していくが、「式・表・グラフのかき方や使い方を定着させる」、「問題を解けるようにする」というねらい**(結果)**ではなく、「なぜそうなる（ならない）といえるのか（いえないのか)」、「計算結果をどう解釈していくのか」という問い**(過程)**の方に重きを置いており、コンピテンシー・ベースの授業観に基づいて実践を行った。

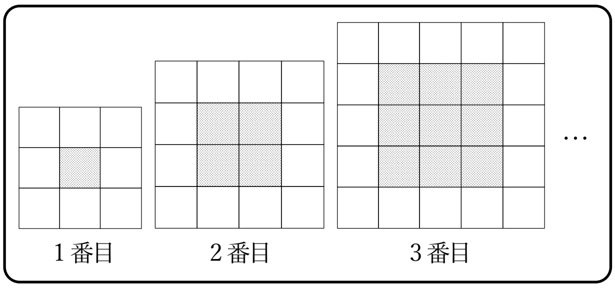
次章からは特に、勇樹と克己の学びを中心にどのような学習が展開されていったかを記述していく。この学年は全体的にいい意味で固定観念に縛られず、独特で柔軟な発想の生徒が多いが、特にこの２人は顕著であり、焦点を当てた理由を以下に記す。まず、勇樹はこの１年で知識・技能の習得以上に見方・考え方の深化、そして学習に対する意欲の高まりが一番感じられたからである。彼は、今年度の公開研究会のポスターセッションで数学の授業について発表した。そこでは、「自分たちで考えた・作った」、「自力で解いた」、「いっぱい考えた」と発表していた。次に、克己は周囲の思考を深め、多角的にし、ときに意欲の高まりをもたらす場合があるからである。理数科目に関する興味・関心が高く、様々な考え方に触れるたび、目を大きく見開き、輝かせる生徒であり、この学年で１番、常識にとらわれない発想をする生徒である。そして、２年生になってから、将来の夢をエンジニアから理数科目の教師になることに変えた生徒である。

２．学びの実際

(0) うれしい出来事

要約にもある通り、昨年度より関数領域では同じ流れで授業実践を行っており、導入の概念形成を図る場面では、教材も同じものを使っている。本実践に向けて、黒板に貼る図形の準備をしていたとき、その図形を見た３年生の男子生徒２人が『あの白黒の正方形の授業ですね』と話しかけてきたのである。１年前の授業で、当時とは違う掲示物だったにも関わらず、すぐ想起できたようであった。このように生徒の記憶にずっと残るような授業をしたいと思える出来事であった。

(1) 一次関数に関する概念形成（第１時～5 時）



導入では、上図のように白黒の正方形が規則的に並んだ図形において、番数の変化に伴って変わる数量について考えた。予想していた数量がいくつか出てきたところで、予想外の提案がなされた。

勇　樹：まんじゅう！
生徒Ａ：なんだよそれ 。
勇　樹：白が皮で、黒があんこ！
教　師：食いしん坊か…。
克　己：だんだんと**あんこの割合**が増えていくよね…。
　　　　「皮：あんこ」はどう変化していくんだろ？
（授業終了後、個人的に）
克　己：**何番目になると黒の方が多くなる**んですかね？
教　師：厳密に計算するには３年生の知識が必要なんだけど、そういう疑問が生まれるのはさすがだね！

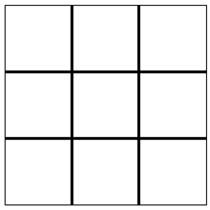
２つの数量の割合の変化というアイデアは今までにないものだったので、価値づけ・評価した。他にも勇気は『積んでいくときにかかる時間（１個当たりにかかる時間を１秒とすれば、全体の面積と同じと考えることにした）』など、図形という抽象度の高いものから具体的な場面を想像して発言することも多かった。

これに限らず、一見関係ない発言の中に数学的な見方・考え方が隠れている場合もある。こういった発言が許容され、ときに克己のように数学的に価値のあるものに繋げていく生徒がいるのがこのクラスの強みである。

第１時で提案された以下の数量を各班で分担して式・表・グラフを調べていくことになった。

１班：黒の面積、全体の周の長さ
２班：白の面積、全体の面積
３班：全体の一辺、かぶっている辺
４班：十の数、Ｔの数
教師：黒の周の長さ、Ｌの数、
　　　　　　　　　　含まれる正方形の数

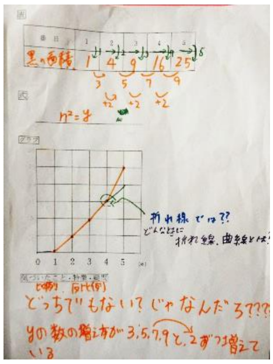
・かぶっている辺



１番目だと、右図の太線のように１２本。

・十、Ｔ、Ｌの数…交差点のこと。
・含まれる正方形の数…１番目だと１４個。
（１×１が９個、２×２が４個、３×３が１個）
３次関数になり、立式には高等学校の知識が必要なため、教師が担当した。

まず、用紙に式・表・グラフと気づいたこと・疑問を、各班に割り振った色のマジックでまとめた。その後、用紙を回覧し、他班の用紙に自分の班の色で気づいたこと・疑問を書き込む活動を行った。

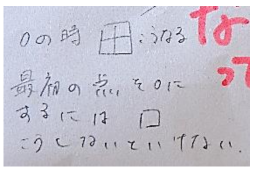


（１班：黒の面積 の用紙）

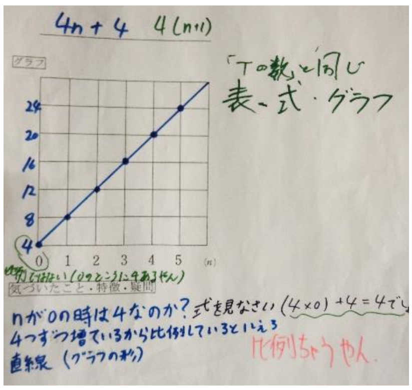
表やグラフにも他班の気づきが書き込まれている

０番目についての議論・グラフのかき方

勇　樹：直線だから比例だね。
玲　愛：でもさぁ、０番目ってこうじゃん（左下図参照）。
　　　　グラフどう結ぶ？
勇　気：こうすればいいじゃん(右下図参照)。



（０番目に関する玲愛の書き込み）



（左下の座標を （０、４） としたグラフ）

０番目について図のように具体的に「田」と書き込んで考えていたのは玲愛だけであった。想像力が豊かで、白黒の増減から感覚的に０番目について思考しているようであった。

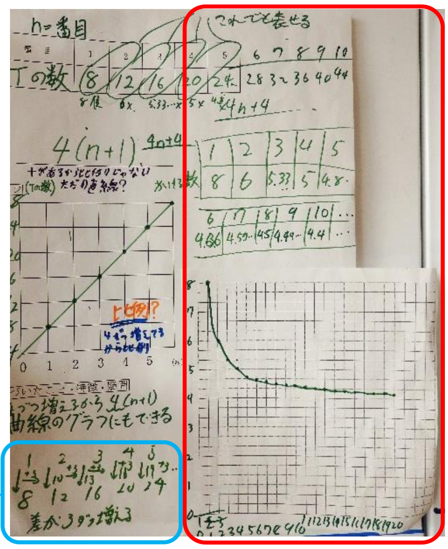
この班が用紙にまとめている段階では、式・表・グラフの特徴から「比例でない」と考えを改めることはできなかった。前頁最後の図のように左下の座標を原点としていなかった班はもう１つあり、前年度の比例の学習の際にも同様のかき方をしている班がたくさんあったことを思い出した。当時は、ｙ軸を上下反転させて右下がりのグラフが右上がりに見えるようなものもあり、固定観念にとらわれない柔軟な軸の取り方だと評価したが、彼らの先輩も後輩もこのような座標軸の取り方をしていないので、彼らの個性として大事にしていきたい。

克己の班の教材への没入

「何か気づくことはないか」という問いに対して、克己は常に深く・多角的に考えようとする。以下に、授業の大筋からは外れるものの、克己の没入が他の生徒に伝播していく様を記述したい。

克　己：これさあ、ｎに何かけたら４(ｎ＋１)になるかを考えると曲線になるんだよね。反比例かな…？
生徒Ｂ：すげー！
生徒Ｃ：でもかけ算して一定じゃないから反比例ではないよね。
生徒Ｂ：ねえねえ、表の上の段と下の段の差が３ずつ増えてるんだけど！
克　己：ほんとだ！

（克己の班の用紙）

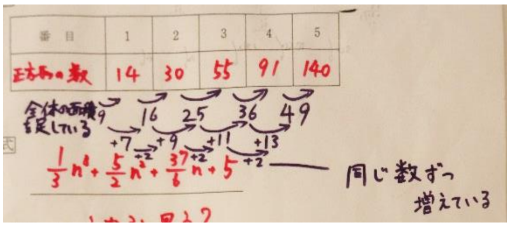


生徒Ｂの気づきについては、（４ｎ＋４）－ｎ＝３ｎ＋４となっていることから明らかであるが、克己は気づかなかった。また、克己の発想については、（４ｎ＋４）／ｎ という関数を扱っており、ｎ → ∞ とすると、４に収束するという、高等学校の極限の内容に繋がるものを示している。実は、授業の本筋と離れているということから、多様で柔軟な発想・気づきであると評価するにとどまり、高等学校に繋がるということは、この研究紀要の執筆に伴い、生徒の学びを整理していく中で気づいたことである。克己は、一般化したり、明確な根拠をもって議論したりすることはまだまだできないようであるが、その発想は群を抜いており、しっかり磨いていくことが教師の責務であると感じた。また、このように生徒の思考の中には中学校数学を超えた、または学校数学で扱わないものもあったりするので、その場で評価できるように研鑽を積んでいきたい。

一次関数の式・表・グラフの特徴についてのまとめ

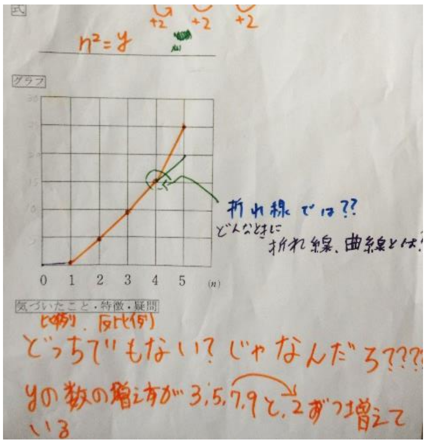
結局、比例か比例でないかについては、教師が正解を言わなくても、用紙を回覧していく中で修正されていった。

また、表の特徴については、下図のような書き込みによって全体に広がっていった。



（教師の用紙への３班の書き込み）

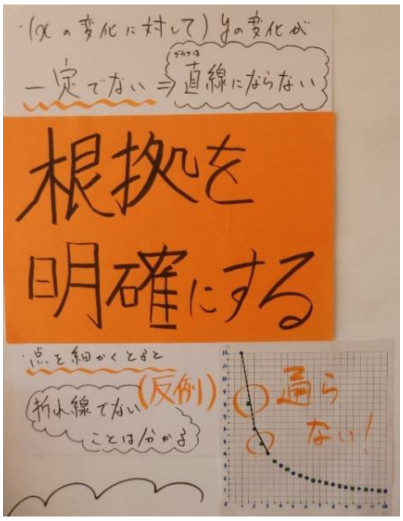
次に、グラフの特徴については、下図のように「折れ線」なのか「曲線」なのかという疑問が全体で共有されたので、全体の議論として取り上げた。



（グラフの形状に関する各班の疑問）

曲線でないことについては、上図にもある通

り、横軸方向の変化に対して縦軸方向の変化の仕方が一定でないことから、皆が納得したようである。また、折れ線でないことについては、『より細かく点をとってみる』という発想で解決した。なお、これと同様な議論が各学年で起こり、同じような根拠によって解決した。(曲線になると断言できる根拠は、中学校数学にはないと、教師が補足した)



(数学的な見方・考え方を可視化した掲示)

これから学習していく関数は y=ａｘ＋ｂ であると方向づけし、式・表・グラフの特徴をまとめていった。曲線になる関数との比較を経て、式・表・グラフが「変化の割合」という概念によって有機的につながっていった。また、「切片」という概念について、０番目の議論を全体で行う際に、玲愛の図を取り上げた。感覚的な玲愛の説明に対し、明確な根拠を持って説明できる昴が各式に０を代入することを提案し、全体で共有された。

ｘ切片について

獲得した概念の補強のために、以下の関数の式・表・グラフを比較した。

ｙ＝２ｘ
ｙ＝２ｘ＋２＝２(ｘ＋１)
ｙ＝２ｘ－４＝２(ｘ－２)
ｙ＝－３ｘ
ｙ＝－３ｘ－３＝－３(ｘ＋１)
ｙ＝－３ｘ＋６＝－３(ｘ－２)

波線のように、共通因数でくくった式も提示した。というのも、導入で生徒たちが数量を式化したときに、括弧を外さない状態のものも多かったからである。括弧の中の数値を考察することで、高等学校で習うｘ切片や、グラフの平行移動につながると面白いと考えた。

ｘ切片については、克己や勇樹、昴など多くの生徒が気づいた。克己は用紙を裏返して透かして見ていたので尋ねると、プラスマイナスがｙ切片と逆になることについて考えていたが、何故かは分からないということだった。

それぞれの式をｘについて解いてみようと投げかけると(例えば、ｙ＝２ｘ－４ ⇒ ｘ＝０．５ｙ＋２)、ハッと気づく生徒もいた。内容の難しさを感じている生徒もいたので、これ以上は深めなかった。

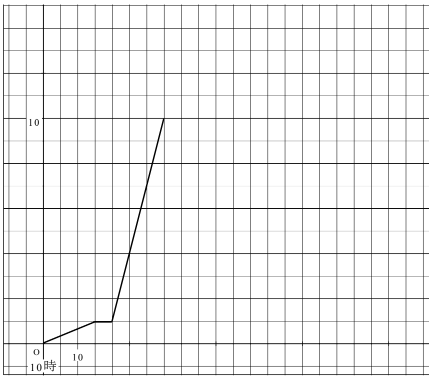
研究紀要を執筆していて、ｙ切片がｙ軸方向の平行移動と関係しているという内容と絡めて、ｘ軸方向の平行移動についても自然に考えることができると感じた。その中で、ｙ＝ａｘ ⇒ ｙ－ｑ＝ａ(ｘ－ｐ)、つまり原点から(ｐ、ｑ)方向への平行移動についても触れることが可能であったと考える。今回、場当たり的な内容になってしまったため、今後、生徒の発想に柔軟に対応するためにも、事前の教材研究の精度を上げていかなければならないと痛感した。

⑵ 現実の世界の文脈で一次関数を捉える

(第６～８時)

以下が授業の大まかな流れである。

①　：エルパへ向かう人の様子を表したグラフ(下図)を見て分かることを考える。
②：示された**問題文☆**から、エルパから帰る様子をグラフ化する。
③：班ごとに、条件を満たすようにエルパに行って帰るグラフをかく。
④：班ごとに、必要最低限の情報でグラフが特定できるように**問題文◎**を作成する。
⑤：問題文◎をもとに各班のグラフを１つのグラフ用紙にかいてみる。
⑥：それぞれの人が出会った時刻等を求める。

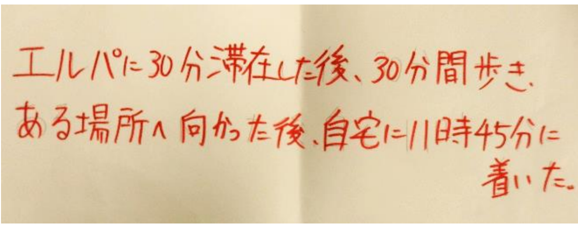


(①の活動の際に提示したグラフ)

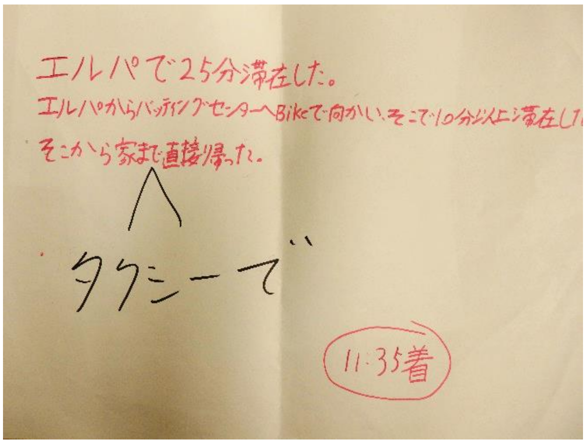
問題文☆
　エルパに１０分滞在した後、タクシーで福井大学へ向かった。福井大学にしばらく滞在した後、バスで自宅に向かった。バスには１０分間乗り、自宅から最寄りのバス停から歩いて帰ると、１１時３０分に自宅に着いた。

条件
・各班に（エルパの滞在時間、１１時何分着）の組を割り当てる。
　（１５、４０）、（２０、５０）、（２５、３５）、（３０、４５）、（３５、５５）
・バス：３６ｋｍ/ｈ、徒歩：４ｋｍ/ｈ
　→ ①の活動で読み取る。
・バス停があるｙの値は以下の通り。
　１、２、３、６、８、１２
・タクシー：４８ｋｍ/ｈ
　貸し自転車：２４ｋｍ/ｈ
　→ どこからどこまでも乗れる。
・ｙの値が以下のところに滞在できる場所がある。
　１２：バッティングセンター
　８：ビッグボーイ
　６：福井大学
　３：ドン・キホーテ
　２：フェニックス・スタジアム

問題文◎の例



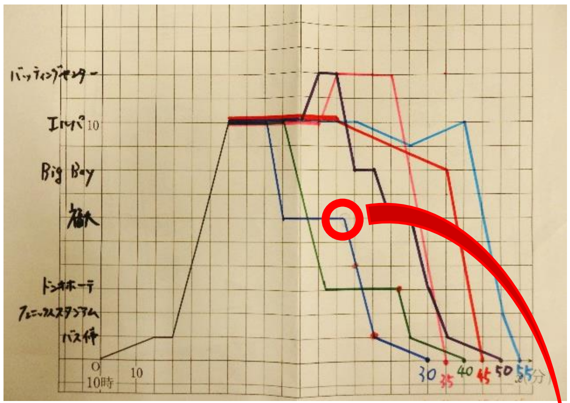
（勇樹の班の問題文）



（グラフが１つに定まらないので加筆した班の問題文）

　④、⑤の活動では、グラフはかけるものの、そのグラフを的確に伝える問題文づくりに多くの班が苦戦した。（導入と班のメンバーは変わっている）その中で、勇気と克己の班だけ修正なしで的確に他班に伝えることができた。

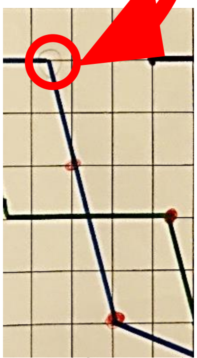
　上手くいかなかった班の多くは、使う乗り物は特定できても順番が確定しなかったり、グラフを格子点から格子点へ結ぶことしか考えなかったため、中途半端な点を通っているものについて考えが及ばなかったりしていた。勇気や克己、昴らの的確な指摘によって加筆修正が行われ、グラフが１つの用紙にまとまった。



（５班分と教師のグラフを１つにまとめたもの）

　次に、⑥の活動として、それぞれの人が出会った時刻や、端点が格子点でないグラフの端点の時刻などを求めることになった。

　初めに、右図の丸で囲んだ部分の時刻を求めた。



（拡大した図）

　勇　樹：縦が３で横が１だから
　　　　　縦が１なら横は１/３だ！
　　　　　（丸で囲んだ辺りを指して）
　生徒D：５分の１/３ってことは…
　勇　樹：１００秒だから１分４０秒！

　このように、割合や相似の考えを使って解いていた班がほとんどであり、最初から距離と時間の関係から解いていた班は１つだけであった（５分で３ｋｍだから１ｋｍ進むのに５/３分かかる）。また、一次関数の式を求めて、ｙ＝６を代入しようという班はなかった。１年生のときの「比例・反比例」でも学習した、グラフから式、式に数値を代入して計算するという手段が想起されなかったのは残念だった。しかし、教科書にあるような無味乾燥な適用題をこなして応用問題に入るのではなく、具体的な文脈の中で数時間かけて基礎基本の習熟と応用を兼ねて

取り組むような単元構成をしているため、グラフの式化にまだ慣れていなかったこと、この場合に限っては生徒の示した手段の方が素早く求められることを考慮して、評価・価値づけした。

その後、いくつかのグラフを式化し、数値を代入して計算したり、グラフの交点を求める手段として、それぞれの式を連立方程式とみなして解いたりする学習を行った。

なお、勇樹がポスターセッションで数学の授業を扱う際に、印象に残っている授業の１つに、自分たちで問題文を作ってみる活動を挙げていた。自分たちの裁量の中で自由に発想できる点、躓きながらも考えを深められた点が良かったとのことである。

(3) 数学の世界の文脈で一次関数を捉える（第 9～10 時）

動点問題を扱ったが、詳細は割愛する。

(4) 「安居中学校の印刷にかかる費用」を数学的に考察する（第 11 時～15 時）

年度当初は、冬季には床暖房・蓄熱の影響で月１００万円を超える電気代や、コロナウイルスの影響で手洗いが増えたため値上がりした水道代などに着目することを考えていた。電気代については、電力会社の方にお話を伺いながら教材化を考えたが、設定が複雑になりすぎることから、今回は断念した。水道代については、設定は簡単であるが、節約のためには節水しかないので、印刷代に絞って実践することにした。

印　刷　関　係（昨年度分）					
コピー用紙					
A4	1箱2500枚×31	1箱1430円	▸44330円	77500枚	1枚約0.57円
B4	1箱2500枚×10	1箱2112円	▸21120円	25000枚	1枚約0.84円
B5	1箱2500枚×3	1箱1056円	→3168円	7500枚	1枚約0.42円
A3	1箱1500枚×3	1箱1689円	→5067円	4500枚	1枚約1.13円
印刷機					
インク(1本8000枚分)	17本	1本2970円			
マスター	14本	1本6655円			
原版のこと。 1種類の印刷で1枚分消費。1本250枚分。					
モノクロプリンタ					
トナー(1本10000枚分)	4本	1本8000円			
ドラムユニット	1本	1コ11000円			
マスターとは違う。 1枚印刷で1枚分消費。1コ25000枚分。					
カラープリンタ					
ブラック	5本	1本11000円			
イエロー	5本	1本14740円			
マゼンタ	5本	1本14740円			
シアン	5本	1本14740円			
カラー設定で印刷：1枚あたり11.9円					
モノクロ設定で印刷：1枚あたり2.8円					
コピー機					
1枚あたり3.4円 昨年度29500枚印刷					




（初めに生徒に提示した情報）

この実践は、啓発の段階まで終わっておらず、テストをはさむことにはなるが、じっくり取り組んでいきたいと考えている。情報の提供から実践したところまでの反省点と手ごたえについて簡単に述べる。まず、反省点については、初めに示した情報が複雑であり、生徒にとって考察に至るまでにいくつものハードルがあったということである。本当に考えさせたいところ以外はシンプルにすることが大切であると学んだ。次に、手ごたえについては、数学の授業で考えたことが実生活に影響を与えたことである。まず、教師自身の節約に対する意識が高まったのはもちろん、玲愛に代表されるように何人かの生徒が『これ、カラーで印刷する意味あります？〇〇円ですよ！もったいないですよね？』と発言するようになった。

３．ふりかえり

安居中学校に赴任して２年目となり、教育観から単元構成の考え方まで大きく変化し、日々悩みながらも実践を行っている。今回のように、１００％教師が教え込むわけではなく、教師が思う方向に誘導するわけでもない、効率や時短を最優先にするわけでもない、生徒の思考や生徒がつくったものに寄り添いながら展開する授業や、実データをもとに考察しそれを実生活に役立てるような授業では、やはり緻密で生徒の目線に立った教材研究が必要不可欠だということを再認識した。これには、本稿でこれまで述べてきた、「生徒の数学的な見方・考え方を瞬時に見極め評価・価値づけできるように教師自身が広く・深く学び続けること」や「授業の中のどこで考えさせるのかを明確にして、焦点化したデータを提示すること」も含まれている。そして、何より教師自身が授業を楽しむ姿勢を忘れてはならないと感じた。魅せる授業をする、研究紀要を書くための授業をする、そう考えると授業の目的が見失われ、上手くいかない。しかし、目の前の生徒と一緒に考えることを楽しむと、授業の準備も捗るものである。何を差し置いても考えたいと思うものである。これからも生徒はもちろん、自分自身も思考することが楽しいと思えるような授業を目指して研究を進めていきたい。

【引用文献】

牧田秀昭・秋田喜代美、「教える空間から学び合う場へ」、東洋館出版社、2012、p118～p145

G.ポリア、「いかにして問題をとくか」、丸善出版、1954

片桐重男、「数学的な考え方の具体化」、明治図書、1988

中島健三、「算数・数学教育と数学的な考え方-その進展のための考察-」、金子書房、1982